第 12 講　対数とその性質，対数関数

PART1　対数の計算と式の値

1　$x=\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$ のとき，$\log_2 x+\log_2 y$，$\log_{\sqrt{2}}\left(x^2-xy+y^2\right)$ の値を求めよ。

Point Pickup

対数の性質 $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$ を用いて，値を求めたい式の対数を

- 1 つにまとめる
- 分解する

のいずれかの方法で変形し，与えられた値を代入する。

必要に応じて，底の変換公式 $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ を用いる。

第12講　PART1　確認問題

1　$x=\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{2}{2-\sqrt{3}}$ のとき，

$\log_8\dfrac{1}{x}+\log_8\dfrac{1}{y}$，$\log_{2\sqrt{2}}(x^2-6xy+y^2)$ の値を求めよ。

$$\log_8\frac{1}{x}+\log_8\frac{1}{y}=\frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

$$\log_{2\sqrt{2}}(x^2-6xy+y^2)=\frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

第 12 講　対数とその性質，対数関数

PART1　対数の計算と式の値

1　$x=\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$ のとき，$\log_2 x+\log_2 y$，$\log_{\sqrt{2}}(x^2-xy+y^2)$ の値を求めよ。

$x=\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$ より

$$x+y=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}=\sqrt{10}$$

$$xy=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}=\frac{10-2}{4}=2$$

$$\log_2 x+\log_2 y=\log_2 xy=\log_2 2=1$$

$$\log_{\sqrt{2}}(x^2-xy+y^2)=\frac{\log_2(x^2-xy+y^2)}{\log_2\sqrt{2}}=\frac{\log_2\{(x+y)^2-3xy\}}{\log_2 2^{\frac{1}{2}}}=\frac{\log_2(10-6)}{\frac{1}{2}}$$

$$=2\log_2 4=2\log_2 2^2=2\cdot2=4$$

第12講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] アイ：-2，ウ：3，エオ：10，カ：3

[解説]

$x=\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{2}{2-\sqrt{3}}$ より

$$x+y=\frac{2}{2+\sqrt{3}}+\frac{2}{2-\sqrt{3}}$$
$$=2\cdot\frac{(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=2\cdot\frac{4}{4-3}$$
$$=8$$

$$xy=\frac{2\cdot 2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=4$$

よって

$$\log_8\frac{1}{x}+\log_8\frac{1}{y}=\log_8\frac{1}{xy}$$ [A]
$$=\log_8\frac{1}{4}=-\log_8 4$$
$$=-\frac{\log_2 4}{\log_2 8}$$ [B]
$$=-\frac{\log_2 2^2}{\log_2 2^3}=-\mathbf{\frac{2}{3}}$$

また

$$x^2-6xy+y^2=(x+y)^2-8xy=8^2-8\cdot 4$$
$$=32$$

よって

$$\log_{2\sqrt{2}}(x^2-6xy+y^2)=\log_{2\sqrt{2}}32$$
$$=\frac{\log_2 32}{\log_2 2\sqrt{2}}$$ [B]
$$=\frac{\log_2 2^5}{\log_2 2^{\frac{3}{2}}}$$ [A]
$$=5\div\frac{3}{2}=\mathbf{\frac{10}{3}}$$

> **[A]　対数の性質**
> $a>0$，$a\neq 1$，$M>0$，$N>0$ で，k は実数のとき
> $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$
> $\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$
> 特に $\log_a\dfrac{1}{N}=-\log_a N$
> $\log_a M^k=k\log_a M$

> **[B]　底の変換公式**
> a，b，c は正の数で，$a\neq 1$，$b\neq 1$，$c\neq 1$ とすると
> $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$
> 特に $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$